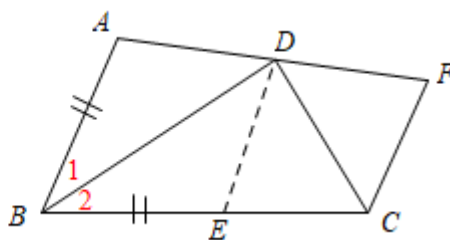
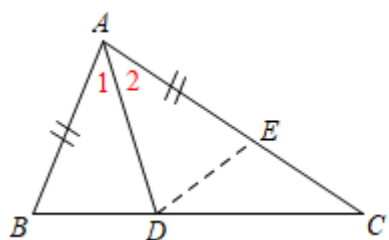


第2讲截长补短

一、截长法

【截长法】：当遇到角分线，并且题目中给出了 $AB \pm CD = EF$ 一类的条件时，可以考虑用截长法，在长边上截取一段等于已知线段，再证明剩下的线段与另一短边相等。

【常见图形】：



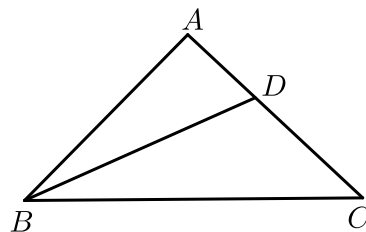
【辅助线作法】：如上左图

在AC上截取 $AE = AB$ ，连接 DE

🍪 举个栗子

栗子1

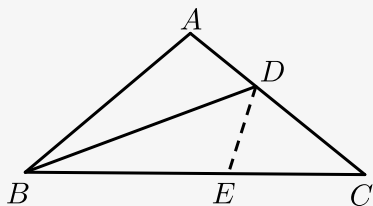
1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 108^\circ$ ， $AB = AC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，交 AC 于 D ，求证：
 $BC = CD + AB$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】方法一：

(截长法) 在 BC 上取点 E 使 $BE = BA$, 连接 DE ,



$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle EBD$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = EB \\ \angle ABD = \angle EBD , \\ BD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (SAS)$,

$\therefore \angle BAC = \angle BED = 108^\circ$, $AB = EB$,

$\therefore \angle DEC = 72^\circ$,

$\therefore AB = AC$,

$\therefore \angle C = \angle ABC = 36^\circ$,

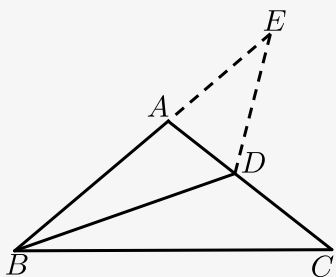
$\therefore \angle CDE = 72^\circ$,

$\therefore \angle CDE = \angle CED = 72^\circ$,

$\therefore CD = CE$,

则 $BC = BE + EC = AB + CD$.

方法二 : (补短法) 延长 BA 至 E , 使 $BE = BC$, 连接 DE ,



$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$,

在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle CBD$ 中 ,

$$\begin{cases} EB = CB \\ \angle ABD = \angle CBD , \\ BD = BD \end{cases}$$

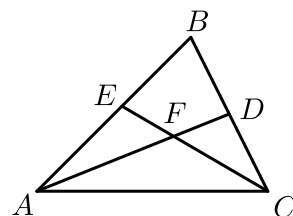
$\therefore \triangle EBD \cong \triangle CBD (SAS)$,

$\therefore DE = DC$, $\angle E = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 36^\circ$,

$\therefore \angle EAD = 180^\circ - \angle BAC = 72^\circ$,
 $\therefore \angle EDA = \angle EAD = 72^\circ$,
 $\therefore EA = ED$,
 $\therefore CD = DE = AE$,
 则 $BC = BE = AB + AE = AB + CD$.

【标注】【知识点】截长补短

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， AD ， CE 分别平分 $\angle BAC$ ， $\angle BCA$ ． AD ， CE 交于点 F ．则（ ）．



- A. $AE + CD > AD$ B. $AE + CD = AD$ C. $AE + CD > AC$ D. $AE + CD = AC$

【答案】D

【解析】在 AC 上截取 $AG = AE$ ，连接 GF ，如图所示，

$$\text{在} \triangle AGF \text{和} \triangle AEF \text{中}, \begin{cases} AG = AE \\ \angle GAF = \angle EAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AGF \cong \triangle AEF (\text{SAS})$,

$\therefore FG = FE$, $\angle AFG = \angle AFE = 60^\circ$.

$\therefore FG = FD$, $\angle GFC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

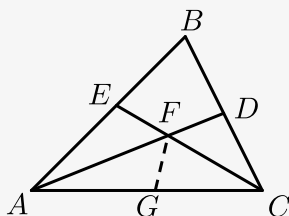
$$\text{在} \triangle CFG \text{和} \triangle CFD \text{中}, \begin{cases} FG = FD \\ \angle GFC = \angle DFC = 60^\circ, \\ FC = FC \end{cases}$$

$\therefore \triangle CFG \cong \triangle CFD (\text{SAS})$,

$\therefore CG = CD$,

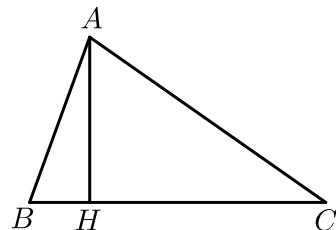
$\therefore AE + CD = AG + CG = AC$.

故选：D .



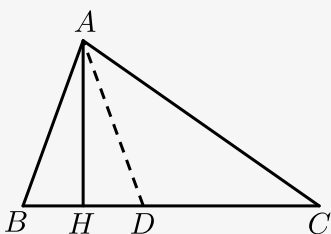
栗子2

3. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AH \perp BC$ 于点 H ， $\angle C = 35^\circ$ ，且 $AB + BH = HC$ ，求 $\angle B$ 的度数。



【答案】 $\angle B = 70^\circ$ 。

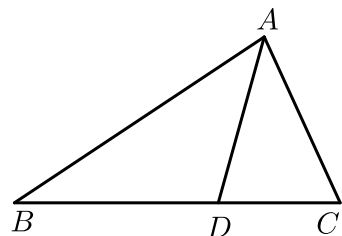
【解析】在 HC 上取 $HD = BH$ 。



$\because AH \perp BC$ 于 H ，
 $\therefore AH$ 是 BD 的垂直平分线，
 $\therefore AB = AD$ ，
 $\therefore \angle B = \angle ADB$ 。
 $\because AB + BH = HC = HD + DC$ ，
 $\therefore AB = DC$ 。
 $\therefore AD = DC$ 。
 $\therefore \angle DAC = \angle C = 35^\circ$ 。
 $\therefore \angle B = \angle ADB = \angle DAC + \angle C = 70^\circ$ 。

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

4. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D .



(1) 若 $AB = AC + CD$, $\angle B = 40^\circ$, 求 $\angle C$ 的大小.

(2) 若 $\angle C = 2\angle B$, 求证: $AC + CD = AB$.

【答案】 (1) 80° .

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 在 AB 上取点 E , 使得 $AE = AC$, 连接 DE .

$$\because AE = AC,$$

$$\angle BAD = \angle CAD,$$

$$AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED,$$

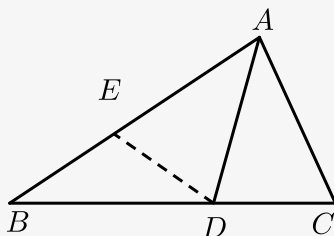
$$\therefore \angle C = \angle AED,$$

$$CD = DE,$$

$$\because AB = AC + CD, AE = AC,$$

$$\therefore CD = BE = DE,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB = 40^\circ, \angle C = \angle AED = 80^\circ.$$



(2) 在 AB 上取点 E , 使得 $AE = AC$, 连接 DE .

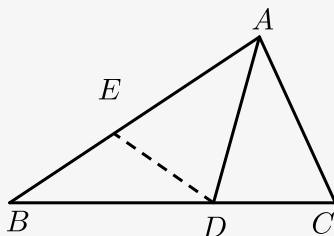
$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle CAD,$$

在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle CAD$

中,

$$\begin{cases} EA = CA \\ \angle EAD = \angle CAD \\ AD = AD \end{cases}$$

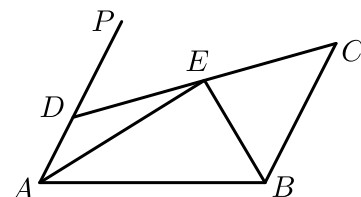


$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle EAD \cong \triangle CAD (\text{SAS}), \\
&\therefore \angle AED = \angle C, \quad ED = CD, \\
&\because \angle AED = \angle B + \angle EDB, \\
&\therefore \angle C = 2\angle B, \\
&\therefore \angle EDB = \angle B, \\
&\therefore BE = DE, \\
&\therefore AC + CD = AB.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】截长补短

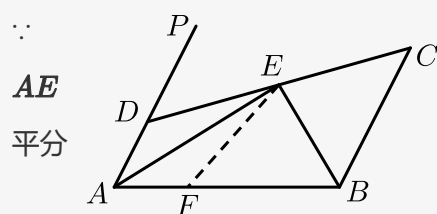
栗子3

5. 如图，已知 $AD \parallel BC$ ， $\angle PAB$ 的平分线与 $\angle CBA$ 的平分线相交于 E ， CE 的连线交 AP 于 D 。求证： $AD + BC = AB$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】在 AB 上截取 $AF = AD$ ，



$\angle PAB$ ，

$$\therefore \angle DAE = \angle FAE,$$

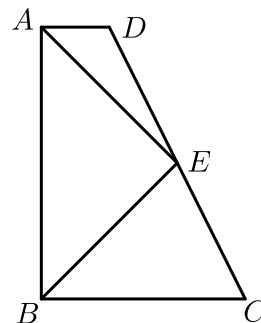
在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle FAE$ 中，

$$\begin{aligned}
&\because \begin{cases} AD = AF \\ \angle DAE = \angle FAE, \\ AE = AE \end{cases} \\
&\therefore \triangle DAE \cong \triangle FAE \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle AFE = \angle ADE, \\
&\because AD \parallel BC, \\
&\therefore \angle ADE + \angle C = 180^\circ, \\
&\therefore \angle AFE + \angle EFB = 180^\circ, \\
&\therefore \angle EFB = \angle C, \\
&\therefore BE \text{ 平分 } \angle ABC, \\
&\therefore \angle EBF = \angle EBC, \\
&\text{在 } \triangle BEF \text{ 和 } \triangle BEC \text{ 中,} \\
&\therefore \begin{cases} \angle EFB = \angle C \\ \angle EBF = \angle EBC, \\ BE = BE \end{cases} \\
&\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEC \text{ (AAS)}, \\
&\therefore BC = BF, \\
&\therefore AD + BC = AF + BF = AB.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

6. 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AE 、 BE 分别平分 $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$, 下列说法正确的有 _____.

(1) $DC = AD + BC$; (2) $AB = AD + BC$; (3) 点 E 为 DC 中点; (4) $AE \perp BE$; (5) $S_{\text{梯形}ABCD} = 2S_{\triangle AEB}$.



【答案】 (2)、(3)、(4)、(5)

【解析】 在 AB 上截取 $AM = AD$,
 $\therefore AM = AD$, AE 平分 $\angle DAB$,
 $\therefore \angle MAE = \angle DAE$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AME$ 中

$$\begin{cases} AM = AD \\ AE = AE \\ \angle MAE = \angle DAE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AME,$$

又 $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$\therefore$

$$\angle EAB + \angle EBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore AE \perp BE$, (4) 正确;

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \angle AED + \angle MEB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MEB = \angle BEC,$$

在 $\triangle MEB$ 和 $\triangle CEB$ 中

$$\begin{cases} \angle MBE = \angle CBE \\ BE = BE \\ \angle MEB = \angle BEC \end{cases},$$

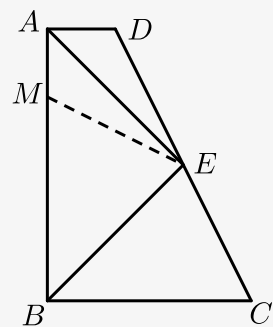
$$\therefore \triangle MEB \cong \triangle CEB,$$

$$\therefore MB = BC,$$

又 $\because AM = AD$,

$$\therefore AD + BC = AM + BM = AB,$$

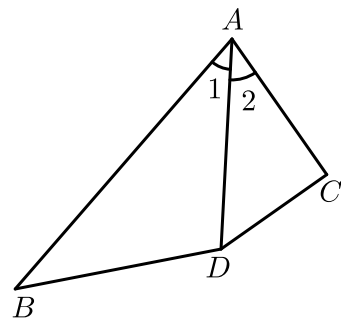
易得 $S_{\text{梯形}ABCD} = 2S_{\triangle AEB}$.



【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

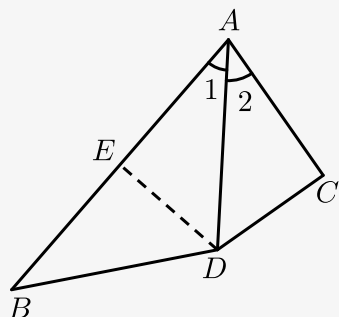
栗子4

7. 如图, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2AC$, 求证: $BD = AD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】在线段 AB 上截取 AE ，使 $AE = AC$ ，



在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中，
$$\begin{cases} AE = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AD = AD \end{cases},$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle AED = \angle C = 90^\circ$.

$\therefore AB = 2AC$ ，

$\therefore AB = 2AE$.

$\therefore E$ 为 AB 中点，

$\therefore BE = AE$.

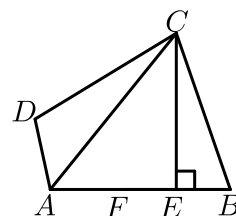
$\therefore \angle AED = \angle BED = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle EBD (\text{SAS})$.

$\therefore AD = BD$.

【标注】【知识点】截长补短

8. 如图，四边形 $ABCD$ 中， AC 平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ 于点 E ， $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ ，下列结论：① $CD = CB$ ，② $AD + AB = 2AE$ ，③ $\angle ACD = \angle BCE$ ，④ $AB - AD = 2BE$ ，其中正确的选项是 _____ .



【答案】①②④

【解析】如图，在 EA 上取一点 F ，使 $EF = BE$ ，连接 CF ，

$$\because CE \perp AB, EF = BE,$$

$$\therefore CF = CB, \angle CFB = \angle B,$$

$$\because \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\angle AFC + \angle CFB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle AFC,$$

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FAC,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACF$ 中，

$$\begin{cases} \angle D = \angle AFC \\ \angle DAC = \angle FAC, \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ACF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AD = AF, CD = CF,$$

$$\therefore CD = CB, \text{ 故①正确.}$$

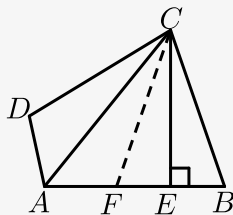
$$AD + AB = AF + (BE + AE)$$

$$= AF + EF + AE = AE + AE$$

$$= 2AE, \text{ 故②正确.}$$

根据已知条件无法证明 $\angle ACD = \angle BCE$ ，故③错误．

$$AB - AD = AB - AF = BF = 2BE, \text{ 故④正确.}$$



【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】AAS

【知识点】角分线性质定理

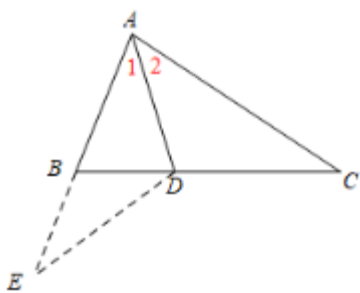
【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

二、补短法

【补短法】：与截长法对立，当题目中给出了 $AB \pm CD = EF$ 一类的条件时，逆向思考，将两条短边通过延长的方式拼接起来，再证明跟长边相等．

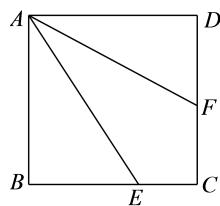
【常见图形】：



【辅助线作法】：如上延长 AB 到点 E ，使 $AE = AC$ ，连接 DE

栗子5

9. 已知：如图， $ABCD$ 是正方形， $\angle FAD = \angle FAE$ ，若 $BE = 6$ ， $AE = 10$ ，则 $DF =$ _____。



【答案】4

【解析】延长 CB 到 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle D = \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 5 = \angle BAF = \angle 1 + \angle 3$ ， $\angle ABG = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$ ，

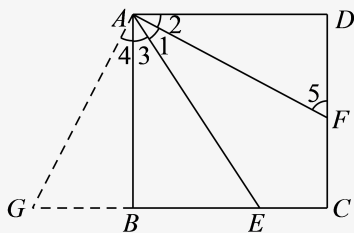
$\therefore$ 易证 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$ (SAS)，

$\therefore \angle G = \angle 5$ ， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4$ ，

$\therefore \angle G = \angle 5 = \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3 = \angle EAG$ ，

$\therefore AE = GE = BE + GB = BE + DF$ 。

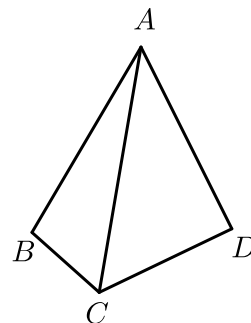
$\therefore DF = AE - BE = 4$ 。



【标注】【知识点】截长补短

10.

如图，已知四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ，证明：
 $BC + DC = AC$ 。



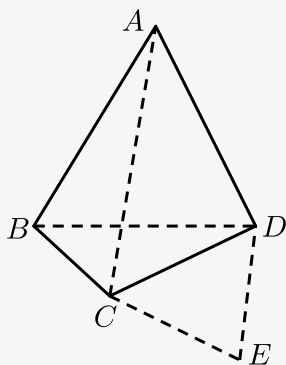
【答案】证明见解析。

【解析】方法一： $\because AB = AD$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，

把 $\triangle ADC$ 绕点 D 逆时针旋转 60° ， A 与 B 重合， C 与 E 重合，

连接 CE 、 DE 、 BD ，则 $\triangle DCE$ 为等边三角形，



$\therefore \angle DCE = 60^\circ$ ，

又 $\because \angle BCD = 120^\circ$ ，

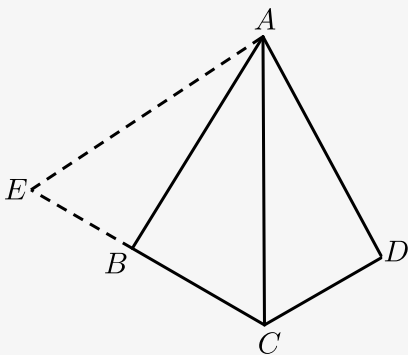
$\therefore \angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$ ，

故 B 、 C 、 D 三点共线，

$\therefore AC = BE = BC + CE = BC + CD$ 。

方法二：延长 CB 至点 E ，使 $BE = DC$ ，

连接 AE ，



在四边形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABE,$$

易得： $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (SAS)，

$$\therefore \angle BAE = \angle DAC, AE = AC,$$

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle BAE = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle EAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEC \text{ 为等边三角形, } CE = AC,$$

$$\therefore CE = BC + BE,$$

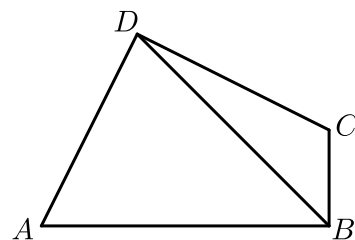
$$\therefore CE = BC + CD,$$

$$\text{即: } AC = BC + CD.$$

【标注】【知识点】旋转型全等

栗子6

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = CD$ ，且 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ， $\angle ABC = \angle ADC$ ，若 $BD = 8$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积为（ ）。



A. 8

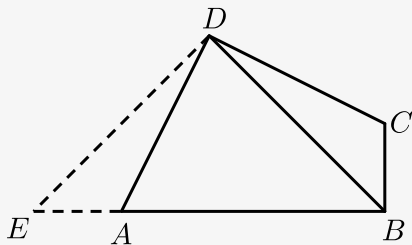
B. 64

C. 32

D. 4

【答案】C

【解析】如图，延长BA至E，使AE = BC，连接DE，



$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\text{且} \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle DAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DAE,$$

在 $\triangle DCB$ 和 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases} DC = DA \\ \angle DCB = \angle DAE \\ BC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCB \cong \triangle DAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = ED, \angle CDB = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ADB = \angle CDB + \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\text{即} \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADE}$$

$$= S_{\triangle BDE}$$

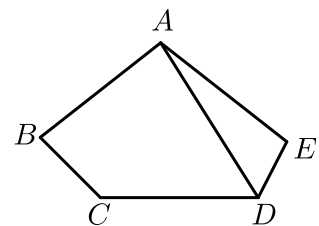
$$= \frac{1}{2} BD \cdot DE,$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32.$$

故选C.

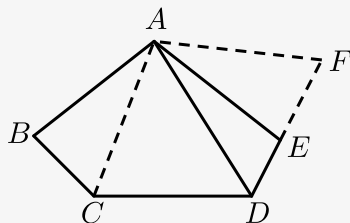
【标注】【知识点】截长补短

12. 如图所示，在五边形ABCDE中， $AB = AE$ ， $BC + DE = CD$ ， $\angle ABC + \angle AED = 180^\circ$ ，求证：DA平分 $\angle CDE$ 。



【答案】 证明见解析 .

【解析】 如图所示 , 延长 DE 至点 F , 使 $EF = BC$, 连接 AC 、 AF .



$$\because \angle ABC + \angle AED = 180^\circ, \angle AEF + \angle AED = 180^\circ .$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AEF .$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle ABC = \angle AEF , \\ BC = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEF (\text{SAS}) .$$

$$\therefore AC = AF .$$

$$\because BC + DE = CD ,$$

$$\therefore EF + DE = CD .$$

$$\text{即 } DC = DF .$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AFD$ 中 ,

$$\begin{cases} AC = AF \\ DC = DF , \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AFD (\text{SSS}) .$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADF .$$

$$\therefore DA \text{ 平分 } \angle CDE .$$

【标注】【知识点】旋转型全等